

finden hierfür

$$\frac{d \ln \tau_{III}}{d \ln \dot{a}} = k T \frac{\sum_i \dot{a}_{0i} \left[\frac{\tau_{III}/G}{\tau_{III}(0)/G(0)} \right]^{A_i/k T}}{\sum_i \dot{a}_{0i} \cdot A_i \left[\frac{\tau_{III}/G}{\tau_{III}(0)/G(0)} \right]^{A_i/k T}} = \frac{k T}{A'} \quad (A 12)$$

Liegt ein eindeutiger Reaktionsweg vor, so dominiert in Gl. (A 12) für alle Temperaturen ein und dasselbe Glied und wir erhalten

$$\frac{d \ln \tau_{III}}{d \ln \dot{a}} = \frac{k T}{A_i}, \quad (A 13)$$

wobei A_i eine von der Temperatur unabhängige Konstante sein muß. Tragen aber in Gl. (A 12) mehrere Glieder zur Quergleitung bei, dann müßte sich die Größe A' wegen der sich mit der Temperatur ändernden Gewichsfaktoren $[(\tau_{III}/G)/(\tau_{III}(0)/G(0))]^{A_i/k T}$ als temperaturabhängig erweisen. Den experimentellen Nachweis, daß A temperaturunabhängig ist, haben wir an Kupfer durchgeführt.

Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas

Von R. LÜST und E. MARTENSEN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforsch. 15 a, 706—713 [1960]; eingegangen am 15. April 1960)

BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL and KULSRUD have found a variational principle (energy principle) which provides a necessary and sufficient condition for the stability of a plasma configuration surrounded by a vacuum and an external conductor. In this energy principle the perturbed magnetic field in the vacuum is derived from a vector potential. In the present investigation the energy principle is formulated with the help of a magnetic scalar potential instead of the vector potential, which simplifies the application of the principle. The many-valued character of the scalar potential assures that this description is equivalent to that using the vector potential. The nature of this many-valuedness is thoroughly investigated.

In den letzten Jahren ist in einer ganzen Reihe von Arbeiten die Stabilität von hydromagnetischen Gleichgewichtskonfigurationen untersucht worden. Von BERNSTEIN et al.¹ ist zur Untersuchung dieses Problems ein Energieprinzip abgeleitet worden, dessen Anwendung insbesondere bei der Untersuchung von komplizierten Gleichgewichtskonfigurationen sehr zweckmäßig ist. In diesem Energieprinzip wird das magnetische Störfeld des Vakuums, das das Plasma umgeben soll, durch ein Vektorpotential \mathfrak{A} beschrieben. Dieses Vektorpotential wird durch bestimmte Bedingungen eindeutig einer beliebigen Verschiebung des im Gleichgewicht befindlichen Plasmas zugeordnet. Für mancherlei Zwecke, insbesondere für eine numerische Behandlung des Problems, ist es indessen praktischer, das magnetische Störfeld des Vakuums durch ein skalares Potential Φ an Stelle des Vektorpotentials zu beschreiben, da man dann nur eine Funktion zu bestimmen hat im Vergleich zu den drei Komponenten des Vektorpotentials. Das skalare magnetische Potential

kann aber auf Grund des dreifachen Zusammenhangs des Vakuumgebiets mehrwertig sein und ist daher durch die Differentialgleichung $\Delta \Phi = 0$ und seine auf den Berandungen vorgeschriebenen Normalableitungen noch nicht vollständig bestimmt; abgesehen von einer für das Problem unwesentlichen additiven Konstanten sind nämlich die „Perioden“ des skalaren Potentials zurächst noch offen.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, in welcher Weise die vollständige Bestimmung des skalaren magnetischen Potentials geschehen kann und welche Vereinfachung sich daraus für die Formulierung des Stabilitätsproblems ergibt. Hierbei wird wesentlich Gebrauch gemacht von Resultaten einer Arbeit von BLANK, FRIEDRICHS und GRAD², im folgenden kurz B.F.G. genannt. Ebenso werden eine Reihe von Bezeichnungen aus dieser Arbeit übernommen.

1. Das Stabilitätsproblem

Es werde eine Plasma-Gleichgewichtskonfiguration von beliebiger Geometrie mit torusförmigem

¹ I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc., Lond. A **244**, 17 [1958].

² A. A. BLANK, K. O. FRIEDRICHS u. H. GRAD, Theory of MAXWELL's Equations without Displacement Current, Notes on

Magneto-Hydrodynamics V. AEC Research and Development Report NYO-6486, Institute of Mathematical Sciences, University, New York 1957.



Zusammenhang betrachtet. Das vom Plasma erfüllte Gebiet \mathfrak{P} werde durch ein Vakuum \mathfrak{B} von einem äußeren Leiter getrennt. Von der Grenzfläche \mathfrak{F}_1 zwischen Plasma und Vakuum sowie von der Grenzfläche \mathfrak{F}_2 zwischen Vakuum und äußerem Leiter setzen wir lediglich dreifachen Zusammenhang voraus, ohne dabei mit der Geometrie dieser Flächen irgendwelche einschränkenden Bedingungen zu verknüpfen (z. B. werden ausdrücklich keinerlei Symmetrieeigenschaften für \mathfrak{F}_1 oder \mathfrak{F}_2 gefordert).

Die zugrunde liegende Gleichgewichtslösung, deren Stabilitätsverhalten Gegenstand des Interesses ist, genügt bekanntlich den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } p + \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}_i, \text{rot } \mathfrak{B}_i] &= 0, \\ \text{div } \mathfrak{B}_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \mathfrak{P}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_i^2 &= \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_a^2, \\ (\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_i) &= 0, \\ (\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_a) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \mathfrak{F}_1, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{B}_a &= 0, \\ \text{div } \mathfrak{B}_a &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \mathfrak{B}, \quad (3)$$

wobei p den Gasdruck in \mathfrak{P} , \mathfrak{B}_i und \mathfrak{B}_a bzw. die magnetische Feldstärke in \mathfrak{P} und \mathfrak{B} bedeuten und \mathfrak{n} stets die äußere Einheitsnormale der betreffenden geschlossenen Berandungsfläche sein soll.

Das Problem der Stabilität einer solchen Gleichgewichtslösung läßt sich zurückführen auf die äquivalente Aufgabe, das Vorzeichen der Gesamtenergieänderung der Gleichgewichtskonfiguration

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_f + \delta W_a \quad (4)$$

zu untersuchen. Notwendig und hinreichend für die Stabilität einer Gleichgewichtskonfiguration eines Plasmas ist es, daß δW für alle (nicht identisch verschwindenden) Verschiebungen $\vec{\xi}$ des Plasmas positiv ist, wobei die Verschiebungen keinerlei Rand- oder Nebenbedingungen unterworfen sind. Im einzelnen bedeutet δW_i die Energieänderung des Plasmas und ist mit γ als dem Verhältnis der spezifischen Wärmen gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \frac{1}{8\pi} \int \int \int_{\mathfrak{P}} \{ (\text{rot}[\vec{\xi}, \mathfrak{B}_i])^2 \\ &\quad - (\vec{\xi} \text{ rot } \mathfrak{B}_i, \text{rot}[\vec{\xi}, \mathfrak{B}_i]) + 4\pi\gamma p (\text{div } \vec{\xi})^2 \\ &\quad + 4\pi (\text{div } \vec{\xi}) (\vec{\xi}, \text{grad } p) \} dg, \end{aligned} \quad (5)$$

δW_f den Beitrag durch die Energieänderung infolge der Verschiebung der Plasmaoberfläche

$$\delta W_f = \frac{1}{16\pi} \int \int_{\mathfrak{F}_1} (\mathfrak{n}, \vec{\xi})^2 \frac{\partial}{\partial n} (\mathfrak{B}_a^2 - \mathfrak{B}_i^2 - 8\pi p) df \quad (6)$$

und schließlich δW_a die Energieänderung des Vakuumfeldes

$$\delta W_a = \frac{1}{8\pi} \int \int \int_{\mathfrak{B}} (\text{rot } \mathfrak{U})^2 dg, \quad (7)$$

wobei \mathfrak{U} das (einwertig geforderte) Vektorpotential der Störung des Vakuum-Magnetfeldes darstellt und auf Grund des folgenden Existenzsatzes (B.F.G.) in eindeutiger Weise durch die jeweilige Verschiebung des Plasmas bestimmt ist: *Zu jedem $\vec{\xi}$ aus \mathfrak{B} und \mathfrak{F}_1 gibt es genau ein (einwertiges) \mathfrak{U} aus \mathfrak{B} , \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 mit*

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \mathfrak{U} &= 0, \\ \text{div } \mathfrak{U} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \mathfrak{B}, \quad (8)$$

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{U}] = -(\mathfrak{n}, \vec{\xi}) \mathfrak{B}_a \quad \text{auf } \mathfrak{F}_1, \quad (9)$$

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{U}] = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_2, \quad (10)$$

$$\int \int_{\mathfrak{F}_1} (\mathfrak{n}, \mathfrak{U}) df = 0. \quad (11)$$

Hierbei ist die erste Gl. (8) die bekannte EULERSche Gleichung, die man durch Minimalisierung von (7) bei festgehaltenen Randwerten (9) und (10) erhält.

Die Forderung der Divergenzfreiheit für \mathfrak{U} in \mathfrak{B} , sowie die Bedingung (11) sind zwar zur eindeutigen Festlegung von \mathfrak{U} notwendig und daher zur Schaffung eindeutiger Verhältnisse grundsätzlich nützlich, trotzdem aber für das eigentliche Problem, in welches gemäß (7) ja nur $\text{rot } \mathfrak{U}$ Eingang findet, im Grunde überflüssig. Hiervon kann man sich überzeugen, wenn man für die Störung des Vakuum-Magnetfeldes die Bezeichnung

$$\delta \mathfrak{B}_a = \text{rot } \mathfrak{U} \quad (12)$$

einführt und hierfür aus dem Vorangehenden, ohne von der zweiten Gleichung (8) oder von (11) Gebrauch machen zu müssen, die folgenden Beziehungen herleitet:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \delta \mathfrak{B}_a &= 0, \\ \text{div } \delta \mathfrak{B}_a &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \mathfrak{B}, \quad (13)$$

$$(\mathbf{n}, \delta \mathfrak{B}_a) = (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathfrak{A}) = -\operatorname{Div}[\mathbf{n}, \mathfrak{A}] \text{ auf } \mathfrak{F}_1 \text{ und } \mathfrak{F}_2 \quad (\text{s. Anm. }^3), \quad (14)$$

$$(\mathbf{n}, \delta \mathfrak{B}_a) = \operatorname{Div}((\mathbf{n}, \vec{\xi}) \mathfrak{B}_a) \quad \text{auf } \mathfrak{F}_1, \quad (15)$$

$$(\mathbf{n}, \delta \mathfrak{B}_a) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_2. \quad (16)$$

Wäre nun \mathfrak{B} ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so wäre $\delta \mathfrak{B}_a$ durch (13), (15) und (16) auf Grund eines bekannten Satzes der Potentialtheorie⁴ bereits eindeutig bestimmt. Da \mathfrak{B} aber dreifach zusammenhängend ist, bedarf es nach B.F.G. noch der Kenntnis der „Flüsse“ von $\delta \mathfrak{B}_a$ durch einen fest gewählten toroidalen Schnitt \mathfrak{S}_1 und einen ebensolchen meridionalen Schnitt \mathfrak{S}_2 durch \mathfrak{B} . Dabei bedeutet es für das Problem keine Einschränkung, wenn wir fordern, daß \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 sich in einer einzigen, \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 verbindenden Kurve schneiden und daß der von \mathfrak{F}_1 nach \mathfrak{F}_2 gerichtete Durchlaufungssinn dieser Schnittkurve aus der positiven Flächennormalen von \mathfrak{S}_1 und der von \mathfrak{S}_2 im positiven Windungssinn (Rechtsschraube) hervorgeht. Die auf \mathfrak{F}_1 bzw. \mathfrak{F}_2 verlaufenden toroidalen Randkurven von \mathfrak{S}_1 seien \mathfrak{C}_{21} bzw. \mathfrak{C}_{22} , deren Umlaufungssinn durch die Richtung der Normalen von \mathfrak{S}_2 festgelegt sein möge; entsprechend seien \mathfrak{C}_{11} und \mathfrak{C}_{12} die meridional verlaufenden Randkurven von \mathfrak{S}_2 mit dem durch die Normale von \mathfrak{S}_1 festgelegten Umlaufungssinn (Abb. 1 und 2). Nunmehr erhalten wir die gesuchten Flüsse mit Hilfe des STOKESSchen Satzes in der Form

$$\int_{\mathfrak{S}_1} (\mathbf{n}_s, \delta \mathfrak{B}_a) df = - \int_{\mathfrak{C}_{22}} (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}) + \int_{\mathfrak{C}_{21}} (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}),$$

$$\int_{\mathfrak{S}_2} (\mathbf{n}_s, \delta \mathfrak{B}_a) df = \int_{\mathfrak{C}_{12}} (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}) - \int_{\mathfrak{C}_{11}} (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}),$$

wenn \mathbf{n}_s die positive Flächennormale von \mathfrak{S}_1 bzw. \mathfrak{S}_2 bezeichnet; mit der Umformung

$$(\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}) = ([[\mathbf{n}, \mathfrak{A}], \mathbf{n}], d\mathfrak{s})$$

liefert die alleinige Benutzung der Randbedingungen (9) und (10)

$$\int_{\mathfrak{S}_1} (\mathbf{n}_s, \delta \mathfrak{B}_a) df = \int_{\mathfrak{C}_{21}} (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathbf{n}, \mathfrak{B}_a, d\mathfrak{s}), \quad (17)$$

$$\int_{\mathfrak{S}_2} (\mathbf{n}_s, \delta \mathfrak{B}_a) df = - \int_{\mathfrak{C}_{11}} (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathbf{n}, \mathfrak{B}_a, d\mathfrak{s}). \quad (18)$$

Damit liegt aber $\delta \mathfrak{B}_a = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ eindeutig fest, ohne daß die Divergenzfreiheit von \mathfrak{A} oder die Bedingung (11) benutzt wäre, mit anderen Worten: $\operatorname{rot} \mathfrak{A}$ bliebe unverändert, wenn man $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ und $\int_{\mathfrak{F}_1} (\mathbf{n}, \mathfrak{A}) df$ beliebige Werte beilegen würde (die Existenz von \mathfrak{A} ist auch in diesem allgemeineren Fall nach B.F.G. gesichert). Aus Gründen der Ein-

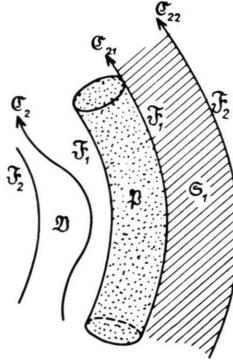


Abb. 1.

Abb. 1. Toroidaler Schnitt \mathfrak{S}_1 durch das Vakuumgebiet \mathfrak{B} ; die positive Normale \mathbf{n}_s von \mathfrak{S}_1 ist in die Zeichenebene hineingerichtet zu denken.

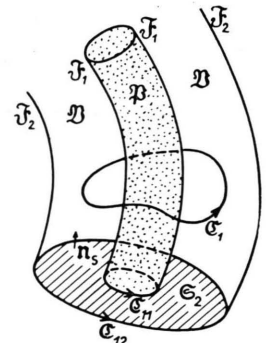


Abb. 2.

Abb. 2. Meridionaler Schnitt \mathfrak{S}_2 durch das Vakuumgebiet \mathfrak{B} ; die Orientierung von \mathfrak{S}_2 wird durch \mathbf{n}_s bestimmt.

fachheit halten wir im folgenden jedoch an der zweiten Gleichung (8) und an (11) fest.

Es soll jetzt untersucht werden, in welcher Weise das durch

$$\delta \mathfrak{B}_a = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \Phi \quad (19)$$

definierte skalare magnetische Potential Φ bestimmt ist. Der Gradient des möglicherweise mehrwertigen skalaren Potentials Φ kann immer in den Gradienten eines einwertigen skalaren Potentials Φ^* und in eine Linearkombination von Vektoren \mathfrak{Y}_i , $i = 1, 2$, zerlegt werden:

$$\delta \mathfrak{B}_a = \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{grad} \Phi^* + \sum_{i=1}^2 \gamma_i \mathfrak{Y}_i. \quad (20)$$

(s. Anm. ⁵).

Hierbei sind die γ_i durch die vom Wege unabhängigen Integrale

³ Auf Grund einer bekannten Vektorformel; dabei ist Div die in der Fläche genommene Divergenz eines Vektors, der nur auf der Fläche erklärt zu sein braucht, jedoch in Richtung der Tangentialebene der Fläche fallen muß.

⁴ A. N. TYCHONOFF u. A. A. SAMARSKI, Differentialgleichungen

der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, S. 373–376.

⁵ Diese Zerlegung ist als Definitionsgleichung für $\operatorname{grad} \Phi^*$ bzw. Φ^* selbst aufzufassen; die Einwertigkeit von Φ^* ist dabei eine notwendige Folge von (20) und der anschließend unabhängig von (20) erklärten Größen γ_i und \mathfrak{Y}_i .

$$\gamma_i = \int_{\mathfrak{C}_i} (\text{grad } \Phi, d\vec{s}), \quad i=1, 2, \quad (21)$$

eindeutig bestimmt und heißen die „Perioden“ des Potentials Φ ; die in \mathfrak{B} verlaufenden geschlossenen Kurven \mathfrak{C}_i , $i=1, 2$, sind beliebig bis auf die einschränkenden Forderungen, daß sich \mathfrak{C}_1 unter alleiniger Durchdringung von \mathfrak{F}_1 im Inneren von \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{C}_2 unter alleiniger Durchdringung von \mathfrak{F}_2 im Äußeren von \mathfrak{F}_2 in einen Punkt zusammenziehen läßt und daß der Durchlaufungssinn der \mathfrak{C}_i bzw. durch die positive Normale der von ihnen geschnittenen Flächen \mathfrak{S}_i bestimmt wird (Abb. 1 und 2). Hiernach durchlaufen \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 bzw. das Vakuum \mathfrak{B} im meridionalen und toroidalen Sinn. Die Perioden γ_1 und γ_2 geben bei einem positiven Umlauf in meridionaler bzw. toroidaler Richtung entlang \mathfrak{C}_1 bzw. \mathfrak{C}_2 die betreffenden Zuwachsraten des Potentials Φ an, die, wie man durch Integration von (19) über \mathfrak{C}_i und anschließende Benutzung des STOKESschen Satzes sofort sieht, den durch die Störung hervorgerufenen Änderungen der Gesamtströme proportional sind, die durch das Plasma einschließlich seiner Oberfläche \mathfrak{F}_1 in toroidaler Richtung bzw. durch den äußeren Leiter einschließlich seiner Begrenzungsfläche \mathfrak{F}_2 in meridionaler Richtung fließen. Die Vektoren \mathfrak{Y}_i , $i=1, 2$, sind als die jeweils *einigen Lösungen der folgenden beiden Randwertprobleme* (B.F.G.) definiert:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \mathfrak{Y}_i = 0, \\ \text{div } \mathfrak{Y}_i = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad i=1, 2, \quad (22)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}_i) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_1, \quad i=1, 2, \quad (23)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}_i) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_2, \quad i=1, 2, \quad (24)$$

$$\int_{\mathfrak{C}_i} (\mathfrak{Y}_k, d\vec{s}) = \delta_{ik} \quad (\text{s. Anm. } ^6), \quad i, k=1, 2. \quad (25)$$

Durch Einsetzen von (20) in (13), (15) und (16) erhält man unter Benutzung von (22) bis (24) für die Bestimmung des einwertigen skalaren Potentials Φ^* das NEUMANNsche Problem (zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie)

$$\Delta \Phi^* = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \text{Div}((\mathfrak{n}, \vec{\xi}) \mathfrak{B}_a) \quad \text{auf } \mathfrak{F}_1, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_2. \quad (28)$$

Der entsprechende Existenzsatz⁷ besagt, daß

$$\int_{\mathfrak{F}_1} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} df = \int_{\mathfrak{F}_2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} df$$

notwendig und hinreichend ist für die Existenz eines einwertigen und bis auf eine additive Konstante eindeutigen Φ^* ; diese Bedingung ist aber wegen (27) und (28) identisch für alle $\vec{\xi}$ erfüllt, da das über eine geschlossene Fläche genommene Integral einer in der Fläche genommenen Divergenz stets verschwindet.

Zur vollständigen Beherrschung des möglicherweise mehrwertigen Potentials Φ bedarf es jetzt noch der Berechnung der Perioden γ_i , die natürlich durch die Verschiebung $\vec{\xi}$ auf dem Wege über das Vektorpotential eindeutig bestimmt sind, wie man durch Einsetzen von (19) in (21) unmittelbar sieht. Bei unserer Fragestellung kommt es daher im folgenden darauf an, das Vektorpotential aus dieser Verknüpfung zu eliminieren. Dazu ist es zweckmäßig, zunächst noch einige andere Größen einzuführen.

2. Die Induktionsmatrix

Zu zwei vorgegebenen Perioden γ_i gibt es auf Grund des schon im vorigen Abschnitt benutzten Existenzsatzes genau ein Vektorfeld \mathfrak{Y} , welches den Bedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \mathfrak{Y} = 0, \\ \text{div } \mathfrak{Y} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (29)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_1, \quad (30)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{F}_2, \quad (31)$$

$$\int_{\mathfrak{C}_i} (\mathfrak{Y}, d\vec{s}) = \gamma_i, \quad i=1, 2, \quad (32)$$

genügt. Dieses ist gegeben durch

$$\mathfrak{Y} = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \mathfrak{Y}_i. \quad (33)$$

$$\text{Die Flüsse } \sigma_i = \int_{\mathfrak{C}_i} (\mathfrak{n}_s, \mathfrak{Y}) df, \quad i=1, 2, \quad (34)$$

des nur von den γ_i abhängigen Feldes \mathfrak{Y} hängen wegen (32) unmittelbar algebraisch von den γ_i ab, denn es gilt

$$\sigma_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_k, \quad i=1, 2, \quad (35)$$

⁶ δ_{ik} ist das KRONECKER-Symbol; es hat den Wert 1 für $i=k$ und den Wert 0 für $i \neq k$.

⁷ É. GOURSAT, Cours d'Analyse Mathématique, tome III. Gauthier-Villars, Paris 1942.

$$\text{mit } L_{ik} = 4\pi \int_{\mathfrak{S}_i} (\mathfrak{n}_s, \mathfrak{Y}_k) df, \quad i, k = 1, 2. \quad (36)$$

Die Matrix L_{ik} , die gemäß (35) den unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Umlaufintegralen γ_i und den Flußintegralen σ_i eines den Gln. (29) bis (31) gehorchenden Vektorfeldes \mathfrak{Y} herstellt und infolgedessen allein von der Geometrie der Berandungsflächen \mathfrak{S}_i abhängt, wird üblicherweise als *Induktionsmatrix* bezeichnet (B.F.G.). Da die \mathfrak{Y}_i die Dimension einer reziproken Länge besitzen, hat die Induktionsmatrix die Dimension einer Länge. Es sei noch besonders erwähnt, daß die Vakuumschnitte \mathfrak{S}_i auf Grund von (29) bis (31) beliebig geführt werden dürfen.

Wir leiten im folgenden zwei wichtige Eigenschaften der Induktionsmatrix her, die man in allgemeiner Form auch bei B.F.G. ausgesprochen findet.

Zunächst gilt die *Symmetrieeigenschaft*

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (37)$$

Den Beweis erbringen wir, indem wir zeigen, daß die Induktionsmatrix (36) als Volumenintegral

$$L_{ik} = 4\pi \int_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Y}_k) dg, \quad i, k = 1, 2, \quad (38)$$

dargestellt werden kann. Da sich die \mathfrak{Y}_i ihrerseits wegen (22) und (25) als Gradienten von grundsätzlich mehrwertigen Potentialen Φ_i darstellen lassen, die im Falle positiver Durchlaufung beliebiger \mathfrak{C}_i beim Durchgang durch \mathfrak{S}_i um den Wert 1 zunehmen, ergibt (38) durch partielle Integration

$$\begin{aligned} L_{ik} &= 4\pi \int_{\mathfrak{B}} (\text{grad } \Phi_i, \mathfrak{Y}_k) dg \\ &= 4\pi \int_{\mathfrak{S}_2} (\mathfrak{n} \Phi_i, \mathfrak{Y}_k) df - 4\pi \int_{\mathfrak{S}_1} (\mathfrak{n} \Phi_i, \mathfrak{Y}_k) df \\ &\quad + 4\pi \int_{\mathfrak{S}_i} (\mathfrak{n}_s, \mathfrak{Y}_k) df - 4\pi \int_{\mathfrak{B}} \Phi_i \text{div } \mathfrak{Y}_k dg. \end{aligned}$$

Wegen der speziellen Eigenschaften (22) bis (24) ist dieser Ausdruck mit der Definition (36) der Induktionsmatrix identisch.

Die zweite wesentliche Eigenschaft der Induktionsmatrix besteht darin, daß die zugehörige quadratische Form *positiv definit* ist, d. h. für alle nicht gleichzeitig verschwindenden Perioden γ_1 und γ_2 gilt

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_i \gamma_k > 0. \quad (39)$$

Zum Beweis betrachten wir das durch (33) gegebene Vektorfeld \mathfrak{Y} für zwei nicht gleichzeitig verschwin-

dende Perioden γ_i . Dieses Feld ist nun sicherlich nicht in \mathfrak{B} identisch Null, da sonst die Integration von (33) über \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 wegen (25) sofort den Widerspruch zur Voraussetzung $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ergeben würde. Aus Stetigkeitsgründen existiert somit immer ein in \mathfrak{B} gelegenes, abgeschlossenes Gebiet, in welchem $\mathfrak{Y} \neq 0$ ist, so daß man in jedem Falle mit Hilfe von (33) und (38) die Ungleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{Y}^2 dg = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_i \gamma_k > 0$$

bekommt.

Als eine unmittelbare Folge von (39) bekommt man für die Determinante der Induktionsmatrix bekanntlich die Ungleichung

$$\det(L_{ik}) \equiv L_{11} L_{22} - L_{12}^2 > 0. \quad (40)$$

Damit ist die Existenz der (gleichfalls symmetrischen) reziproken Induktionsmatrix $L_{ik}^{(-1)}$ auf Grund des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij} L_{jk}^{(-1)} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \quad (41)$$

gesichert. Insbesondere ist es nunmehr möglich, Gl. (35) für die Flüsse σ_i nach den Perioden γ_i hin aufzulösen:

$$\gamma_i = 4\pi \sum_{k=1}^2 L_{ik}^{(-1)} \sigma_k, \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Wir geben anschließend zwei Beispiele für die Berechnung der Induktionsmatrix an. Dabei benutzen wir Zylinderkoordinaten (r, φ, z) .

Beispiel 1: Periodischer Plasmazylinder. Die Grenzflächen des Vakuums seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1: & \quad r = r_1, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \mathfrak{S}_2: & \quad r = r_2, \quad 0 \leq z \leq l, \end{aligned}$$

wobei r_1 den Radius des Plasmazylinders, $r_2 > r_1$ den Radius der Innenfläche des äußeren Leiters und l die Höhe des Zylinders bedeutet. Als Vakuumschnitte wählen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1: & \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \varphi = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \mathfrak{S}_2: & \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = 0; \end{aligned}$$

die positive Normalenrichtung von \mathfrak{S}_1 entspreche wachsendem φ , so daß die von \mathfrak{S}_2 auf Grund der Voraussetzungen wachsendem z entspricht. Die \mathfrak{Y}_i ergeben sich folgendermaßen aus (22) bis (25)

$$\mathfrak{Y}_1 = (0, 1/2 \pi r, 0), \quad (43)$$

$$\mathfrak{Y}_2 = (0, 0, 1/l). \quad (44)$$

Wegen $(\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2) = 0$ ist die Induktionsmatrix diagonal ($L_{12} = 0$), und ihre Diagonalelemente berechnen sich aus (36) zu

$$L_{11} = 2 l \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (45)$$

$$L_{22} = 4 \pi^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{l}. \quad (46)$$

Beispiel 2: Plasmatorus. Die Grenzflächen des Vakuums seien

$$\mathfrak{S}_1: (r - a_1)^2 + z^2 = \varrho_1^2,$$

$$\mathfrak{S}_2: (r - a_2)^2 + z^2 = \varrho_2^2$$

mit a_1 und a_2 als den großen Radien von Plasmatorus und äußerem Leiter und $\varrho_1 < a_1$ und $\varrho_2 < a_2$ als den entsprechenden kleinen Radien. Die positiven Konstanten $a_1, a_2, \varrho_1, \varrho_2$ müssen natürlich so gewählt sein, daß \mathfrak{S}_1 ganz im Inneren von \mathfrak{S}_2 liegt; hierfür ist notwendig und hinreichend

$$a_2 + \varrho_2 > a_1 + \varrho_1,$$

$$a_2 - \varrho_2 < a_1 - \varrho_1.$$

Die Schnittflächen seien beschrieben durch

$$\mathfrak{S}_1: a_1 + \varrho_1 \leq r \leq a_2 + \varrho_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = 0,$$

$$\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_{22} \ominus \mathfrak{S}_{21},$$

wobei

$$\mathfrak{S}_{21}: r = a_1 + \varrho \cos \vartheta, \quad \varphi = 0, \quad z = \varrho \sin \vartheta,$$

$$0 \leq \varrho \leq \varrho_1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

$$\mathfrak{S}_{22}: r = a_2 + \varrho \cos \vartheta, \quad \varphi = 0, \quad z = \varrho \sin \vartheta,$$

$$0 \leq \varrho \leq \varrho_2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi;$$

die positiven Normalenrichtungen von \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 entsprechen wachsendem z bzw. abnehmendem φ .

Die \mathfrak{Y}_i lauten dann

$$\mathfrak{Y}_1 = (Y_r(r, z), 0, Y_z(r, z)), \quad (47)$$

$$\mathfrak{Y}_2 = (0, -1/2 \pi r, 0), \quad (48)$$

so daß wir auch hier eine diagonale Induktionsmatrix bekommen. Die Berechnung von L_{11} ist aber nicht in geschlossener Form möglich, doch kann man immerhin noch eine Integration in (36) ausführen:

$$L_{11} = 8 \pi^2 \int_{a_1 + \varrho_1}^{a_2 + \varrho_2} Y_z(r, 0) r dr. \quad (49)$$

Das Integral (49) läßt sich jedoch ohne Schwierigkeiten numerisch auswerten, wenn nur $Y_z(r, 0)$ an eini-

gen wenigen Punkten des Intervalls

$$a_1 + \varrho_1 \leq r \leq a_2 + \varrho_2$$

bekannt ist. Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned} L_{22} &= 2 \iint_{\mathfrak{S}_{22}} \frac{1}{r} df \\ &= 2 \iint_{\mathfrak{S}_{22}} \frac{1}{r} df - 2 \iint_{\mathfrak{S}_{21}} \frac{1}{r} df; \\ 2 \iint_{\mathfrak{S}_{21}} \frac{1}{r} df &= 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi_i} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{\varrho d\vartheta d\varphi}{a_i + \varrho \cos \vartheta} \\ &= 4 \pi \int_{\varrho=0}^{\varrho_i} \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{a_i^2 - \varrho^2}} \\ &= 4 \pi (a_i - \sqrt{a_i^2 - \varrho_i^2}), \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

eingesetzt:

$$L_{22} = 4 \pi (a_2 - a_1 - \sqrt{a_2^2 - \varrho_2^2} + \sqrt{a_1^2 - \varrho_1^2}). \quad (50)$$

Die Tatsache, daß die Induktionsmatrix in beiden betrachteten Fällen diagonal ist, gilt nicht allgemein. Beispielsweise erhält man für stellaratorförmige Anordnungen, bei denen die Felder \mathfrak{Y}_i eine *Rotational-Transform*, d. h. nicht geschlossene Feldlinien besitzen können, auf Grund von (36) ein im allgemeinen nicht verschwindendes L_{12} , wie man durch geeignete Wahl der \mathfrak{S}_i leicht erkennt.

3. Berechnung der Perioden

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz: Für den einwertigen Anteil Φ^* des möglicherweise mehrwertigen skalaren magnetischen Potentials Φ gilt

$$\int \int \int_{\mathfrak{B}} (\text{grad } \Phi^*, \mathfrak{Y}_i) dg = 0, \quad i = 1, 2. \quad (51)$$

Partielle Integration ergibt nämlich

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\mathfrak{B}} (\text{grad } \Phi^*, \mathfrak{Y}_i) dg &= \int \int_{\mathfrak{S}_2} (\mathfrak{n} \Phi^*, \mathfrak{Y}_i) df \\ &\quad - \int \int_{\mathfrak{S}_1} (\mathfrak{n} \Phi^*, \mathfrak{Y}_i) df - \int \int \int_{\mathfrak{B}} \Phi^* \text{div } \mathfrak{Y}_i dg, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck verschwindet auf Grund der besonderen Eigenschaften der \mathfrak{Y}_i .

Eliminieren wir $\text{grad } \Phi^*$ in (51) durch die aus (19) und (20) folgende Identität

$$\text{grad } \Phi^* = \text{rot } \mathfrak{A} - \sum_{k=1}^2 \gamma_k \mathfrak{Y}_k,$$

so ergibt sich unter Benutzung der Darstellung für die Induktionsmatrix (38) die Identität

$$\int_{\mathfrak{B}} \int (\text{rot } \mathfrak{A}, \mathfrak{Y}_i) \, dg - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_k = 0.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_2} \int ([n, \mathfrak{A}], \mathfrak{Y}_i) \, df - \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \mathfrak{A}], \mathfrak{Y}_i) \, df \\ + \int_{\mathfrak{B}} \int (\mathfrak{A}, \text{rot } \mathfrak{Y}_i) \, dg - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_k = 0. \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen (9) und (10) sowie Benutzung der Rotationsfreiheit der \mathfrak{Y}_i liefert

$$\sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_k = 4\pi \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \mathfrak{Y}_i) \, df, \quad i=1, 2, \quad (52)$$

und hieraus folgt durch Matrix-Multiplikation mit der inversen Induktionsmatrix

$$\gamma_i = 4\pi \sum_{k=1}^2 L_{ik}^{(-1)} \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \mathfrak{Y}_k) \, df, \quad i=1, 2. \quad (53)$$

Für das Beispiel des periodischen Plasmazyinders lauten die Perioden hiernach wegen (43) bis (46)

$$\gamma_1 = \frac{1}{r_1 l \ln(r_2/r_1)} \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) B_{a\varphi} \, df, \quad (54)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) B_{az} \, df, \quad (55)$$

während man für den Plasmatorus auf Grund von (47) bis (50)

$$\gamma_1 = \frac{\int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) B_{at} Y_t \, df}{\frac{a_2 + \varrho_2}{2\pi} \int_{a_1 + \varrho_1} Y_z(r, \theta) r \, dr}, \quad (56)$$

$$\gamma_2 = - \frac{\int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) (B_{a\varphi}/r) \, df}{2\pi(a_2 - a_1 - \sqrt{a_2^2 - \varrho_2^2} + \sqrt{a_1^2 - \varrho_1^2})} \quad (57)$$

erhält, wobei B_{at} und Y_t die im positiven meridionalen Sinne genommenen Tangentialkomponenten von \mathfrak{B}_a und \mathfrak{Y}_1 auf der Plasmaoberfläche $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ sind. Außerdem ist benutzt, daß man die Inverse der in diesen beiden Fällen diagonalen Induktionsmatrix in der einfachen Form

$$L_{11}^{(-1)} = \frac{1}{L_{11}}, \quad L_{12}^{(-1)} = L_{21}^{(-1)} = 0, \quad L_{22}^{(-1)} = \frac{1}{L_{22}}$$

bekommt.

4. Energieänderung des Vakuumfeldes

Aus (7), (19) und (20) erhalten wir für den von der Störung des Vakuumfeldes herrührenden Energieänderungsanteil

$$\delta W_a = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathfrak{B}} \int \int \left(\text{grad } \Phi^* + \sum_{i=1}^2 \gamma_i \mathfrak{Y}_i, \text{grad } \Phi^* + \sum_{k=1}^2 \gamma_k \mathfrak{Y}_k \right) dg.$$

Benutzung des Hilfssatzes zu Beginn des vorigen Abschnitts und der Darstellung (38) für die Induktionsmatrix ergibt

$$\begin{aligned} \delta W_a = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathfrak{B}} \int \int (\text{grad } \Phi^*)^2 \, dg \\ + \frac{1}{32\pi^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{ik} \gamma_i \gamma_k. \end{aligned} \quad (58)$$

Da Φ^* einwertig ist und der LAPLACESchen Dgl. (26) genügt, läßt sich das auftretende Volumenintegral auf Grund des GREENSchen Satzes in die Summe zweier Oberflächenintegrale überführen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} \int \int (\text{grad } \Phi^*)^2 \, dg \\ = \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_2} \int \Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \, df - \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int \Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \, df, \end{aligned}$$

und die Randbedingungen (27) und (28) liefern

$$\int_{\mathfrak{B}} \int \int (\text{grad } \Phi^*)^2 \, dg = - \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int \Phi^* \text{Div}([n, \vec{\xi}) \mathfrak{B}_a) \, df.$$

Hier läßt sich, wenn Grad den in der Fläche ausgeführten Gradienten eines Flächenskalars bedeutet, noch eine weitere partielle Integration in der Fläche $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ ausführen, wobei man sofort erkennt, daß der ausintegrierte Bestandteil verschwindet:

$$\int_{\mathfrak{B}} \int \int (\text{grad } \Phi^*)^2 \, dg = \int_{\tilde{\mathfrak{B}}_1} \int ([n, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \text{Grad } \Phi^*) \, df. \quad (59)$$

Da \mathfrak{B}_a entsprechend (2) auf der Plasmaoberfläche keine Normalkomponenten besitzt, gilt dort

$$([n, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \text{Grad } \Phi^*) = (\mathfrak{B}_a, \text{grad } \Phi^*),$$

und man bekommt durch Einsetzen von (53) und (59) in (58) den gewünschten Ausdruck für die Energieänderung des Vakuums, in den nur noch die Verschiebung $\vec{\xi}$ des Plasmas und das einwertige Potential Φ^* eingeht:

$$\delta W_a = \frac{1}{8\pi} \int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \text{grad } \Phi^*) df \quad (60)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ik}^{(-1)} \left(\int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \mathfrak{Y}_i) df \right) \cdot \left(\int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \mathfrak{Y}_k) df \right).$$

Für bestimmte numerische Verfahren ist es indessen zweckmäßig, auch noch die Berechnung von Φ^* zu vermeiden; dies sind solche Verfahren, die es ermöglichen, direkt

$$\delta \mathfrak{B}_a^* = \text{grad } \Phi^* \quad (61)$$

bzw. nur die in (60) auftretenden Tangentialkomponenten von $\delta \mathfrak{B}_a^*$ auf $\tilde{\mathfrak{S}}_1$ zu berechnen. Eliminiert man zu diesem Zwecke Φ^* aus (26) bis (28), so erhält man das nach bekannten Sätzen (B.F.G.) genau eine Lösung $\delta \mathfrak{B}_a^*$ besitzende Randwertproblem

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \delta \mathfrak{B}_a^* = 0, \\ \text{div } \delta \mathfrak{B}_a^* = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \mathfrak{B}, \quad (62)$$

$$(\mathbf{n}, \delta \mathfrak{B}_a^*) = \text{Div}((\mathbf{n}, \vec{\xi}) \mathfrak{B}_a) \quad \text{auf } \tilde{\mathfrak{S}}_1, \quad (63)$$

$$(\mathbf{n}, \delta \mathfrak{B}_a^*) = 0 \quad \text{auf } \tilde{\mathfrak{S}}_2, \quad (64)$$

$$\int_{\mathfrak{C}_i} (\delta \mathfrak{B}_a^*, d\mathfrak{s}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (65)$$

Es erscheint bemerkenswert, daß nicht die Induktionsmatrix L_{ik} selbst, sondern nur ihre Inverse $L_{ik}^{(-1)}$ in den endgültigen Energieänderungsausdruck (60) eingeht. Wir geben daher noch die allgemeine explizite Darstellung der inversen Induktionsmatrix an:

$$L_{11}^{(-1)} = \frac{L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}, \quad L_{22}^{(-1)} = \frac{L_{11}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2},$$

$$L_{12}^{(-1)} = L_{21}^{(-1)} = -\frac{L_{12}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}. \quad (66)$$

Mit L_{ik} besitzt bekanntlich auch $L_{ik}^{(-1)}$ die Eigenschaft, daß die zugehörige quadratische Form positiv definit ist. Daher übt der durch die Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials, d. h. der durch die Änderungen der beiden Gesamtströme bedingte Bestandteil der Energieänderung (60) stets einen stabilisierenden Einfluß auf das Gesamtproblem aus.

Im Spezialfall des periodischen Plasmazyinders erhält man auf Grund des Vorhergehenden

$$\delta W_a = \frac{1}{8\pi} \int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \text{grad } \Phi^*) df \quad (67)$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2 r_1^2 l \ln(r_2/r_1)} \left(\int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) B_{a\varphi} df \right)^2$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2 l (r_2^2 - r_1^2)} \left(\int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) B_{az} df \right)^2,$$

und für den Plasmatorus ergibt sich

$$\delta W_a = \frac{1}{8\pi} \int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (\mathfrak{B}_a, \text{grad } \Phi^*) df \quad (68)$$

$$+ \frac{1}{2L_{11}} \left(\int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) B_{at} Y_t df \right)^2$$

$$+ \frac{\left(\int_{\tilde{\mathfrak{S}}_1} \int (\mathbf{n}, \vec{\xi}) (B_{a\varphi}/r) df \right)^2}{32\pi^3 (a_2 - a_1 - \sqrt{a_2^2 - \varrho_2^2} + \sqrt{a_1^2 - \varrho_1^2})}$$

mit dem geschlossen nicht auswertbaren Integral (49) für den Induktionskoeffizienten L_{11} .

Die Verfasser danken Herrn Dr. K. JÖRGENS, dessen unveröffentlichte Untersuchungen zum Problem der Mehrwertigkeit des Potentials eine wesentliche Hilfe waren, für wertvolle Anregungen und Diskussionen.